A. KADDOURI

SMP / S4 - Méc. quantique

Corrigé des Exercices Complémentaires

I

I.A/

1°) • $[A, BC] = A(BC) - (BC)A = ABC - BCA + BAC - BAC$

$= (AB - BA)C + B(AC - CA) = [A,B]C + B[A,C]$

• $[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]]$

$= (A[B,C] - [B,C]A) + (B[C,A] - [C,A]B) + (C[A,B] - [A,B]C)$

$= ABC - ACB - BCA + CBA + BCA - BAC - CAB + ACB$

$+ CAB - CBA - ABC + BAC = 0$

• $[A,B]^+ = (AB - BA)^+ = B^+A^+ - A^+B^+ = [B^+, A^+]$ car $(AB)^+ = B^+A^+$

si $A^+ = A$ et $B^+ = B \Rightarrow [A,B]^+ = [B,A] = -[A,B]$

2°) Démonstration par récurrence :

vrai pour $n-1$ càd : $[A, B^{n-1}] = \sum_{s=0}^{n-2} B^s [A,B] B^{s-n-2}$

or $[A, B^n] = [A, B^{n-1}B] = B^{n-1}[A,B] + [A, B^{n-1}]B$ (d'après 1°)

avec $B^{n-1}[A,B] = B^{n-1}[A,B]B^0 \Rightarrow [A, B^n] = \sum_{s=0}^{n-1} B^s [A,B] B^{n-s-1}$

si $[A,B]$ commute avec $B \Rightarrow [A,B^n] = \sum_{s=0}^{n-1} [A,B] B^{n-1} = n[A,B]B^{n-1}$

car $\sum_{p=1}^{n} a = na$

sachant que $[X, P_x] = i\hbar \mathbb{1}$ qui commute avec X et avec P_x.

$\Rightarrow [X, P_x^n] = i\hbar n P_x^{n-1}$ et $[P_x, X^n] = -i\hbar n X^{n-1}$

3°) $F(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n \Rightarrow F'(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n n A^{n-1}$

a) • $[X, F(P_x)] = [X, \sum f_n P_x^n] = \sum f_n [X, P_x^n] = i\hbar \sum n f_n P_x^{n-1} = i\hbar \frac{d}{dP_x} F(P_x)$

• De même $[P_x, G(X)] = -i\hbar \frac{d}{dX} G(X)$.

...

De façon générale, on a donc :

Si A et B commutent avec $[A,B] \Longrightarrow [A, F(B)] = [A,B]\frac{dF}{dB}$.

Application : $S_\alpha(d) = e^{\frac{i d P_\alpha}{\hbar}}$; $[R_\alpha, S_\alpha(d)] = [R_\alpha, P_\alpha]\frac{dS_\alpha}{dP_\alpha}$ car R_α et P_α commutent avec $[R_\alpha, P_\alpha]$ qui est $= i\hbar \mathbb{1}$. $\alpha : x, y, z$.

avec $\frac{dS_\alpha}{dP_\alpha} = i\frac{d}{\hbar}e^{i\frac{d}{\hbar}P_\alpha} = i\frac{d}{\hbar}S_\alpha(d) \Rightarrow [R_\alpha, S_\alpha(d)] = -d\,S_\alpha(d)$

B)

- $(a\langle\phi|A|\psi\rangle)^\dagger = a^*\langle\phi|A|\psi\rangle^*$; $(\text{nombre})^\dagger = \text{nombre complexe}$
- $(a|\psi\rangle\langle\varphi|\phi\rangle)^\dagger = a^*\langle\varphi|\phi\rangle^*\langle\psi|$; $(\text{ket})^\dagger = \text{bra}$.
- $(A|\psi\rangle\langle\phi|\varphi\rangle)^\dagger = \langle\phi|\varphi\rangle^*\langle\psi|A^\dagger$; $(\text{ket})^\dagger = \text{bra}$
- $(|a\psi\rangle\langle\phi|B|\psi\rangle\langle\phi|)^\dagger = a^*\langle\phi|B|\psi\rangle^*|\phi\rangle\langle\varphi|$; $(\text{opérateur})^\dagger = \text{opérateur adjoint}$
- $(|b\phi\rangle\langle\varphi|A|\psi\rangle\langle\phi|B^\dagger)^\dagger = b^*\langle\varphi|A|\psi\rangle^* B|\phi\rangle\langle\phi|$; ...
- $(|a\psi\rangle\langle\phi|AB|\psi\rangle\langle\phi|)^\dagger = a\langle\phi|AB|\psi\rangle^*|\phi\rangle\langle\varphi|$; ...
- $(ia\langle\phi|A|\psi\rangle\langle b\varphi|\phi\rangle = -ia^*b^*\langle\phi|A|\psi\rangle^*\langle\varphi|\phi\rangle^*$; ...
- $(|ia\psi\rangle e^{iaB}|\varphi\rangle)^\dagger = -ia^*\langle\varphi|e^{-ia^*B^\dagger}\langle\psi|$; ...

II

$\{|u_i\rangle\}$ base $i=1,2,3$ et $A = a\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

1°). A est une matrice réelle et symétrique $A^+ = {}^tA^* = A \rightarrow$ A est hermitique

• vp : $\det(A - \lambda\delta_{ij}) = 0 \Rightarrow \lambda^2(3a-\lambda) = 0$

$\lambda = 0$ (vp double) et $\lambda = 3a$ (vp simple)

• $\vec{Vp}$: soit $|\varphi_1\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i |u_i\rangle$ et $|\varphi_2\rangle = \sum_{i=1}^{3} y_i |u_i\rangle$ associés à $\lambda = 0$

→ avec $A|\varphi_1\rangle = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$ avec $\sum_{i=1}^{3} |x_i|^2 = 1$.

En prenant $x_3 = 0 \rightarrow |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - |u_2\rangle)$

→ avec $A|\varphi_2\rangle = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 0$ avec $\sum_{i=1}^{3} |y_i|^2 = 1$ et $\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = 0$

$\Rightarrow y_1 = y_2$ et $y_3 = -(y_1 + y_2)$

soit $|\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle - 2|u_3\rangle)$.

• $\vec{Vp}$ associé à $\lambda = 3a$ soit $|\varphi_3\rangle = \sum_{i=1}^{3} z_i |u_i\rangle$

$A|\varphi_3\rangle = 3a|\varphi_3\rangle \Rightarrow$
$$\begin{cases} -2z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_1 - 2z_2 + z_3 = 0 \\ z_1 + z_2 - 2z_3 = 0 \end{cases}$$
avec $\langle\varphi_1|\varphi_3\rangle = \langle\varphi_2|\varphi_3\rangle = 0$ et $\sum_i |z_i|^2 = 1$.

$\Rightarrow |\varphi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle + |u_3\rangle)$.

2°) L'ensemble $\{|\varphi_i\rangle, i=1,2,3\}$ est formé de kets linéairement indépendants

$\{|\varphi_i\rangle\}$ forme une base (vérifie R.O et R.F) → A est observable.

3°) Dans $\{|\varphi_i\rangle\}$, $A = 3a\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ dans l'ordre $i = 1, 2, 3$.

En utilisant la règle :

Si $A|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle \Rightarrow F(A)|\varphi\rangle = F(\lambda)|\varphi\rangle \Rightarrow F(A) = \begin{pmatrix}F(0)&0&0\\0&F(0)&0\\0&0&F(3a)\end{pmatrix}$

Donc

$$e^A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^{3a}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sqrt{A} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\sqrt{3a}\end{pmatrix}$$

dans l'ordre $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle$.

III/ E.C.O.C.

Dans la base $\{|i>\}$, les matrices représentant les opérateurs A et B sont

1) $(A) = a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $(B) = b\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ Dans l'ordre $\{|1>, |2>, |3>\}$.

Les matrices sont à éléments réels ⇒ A et B hermitiques } ⇒ A et B sont observables

les $\vec{v_p}$ sont $|1>; |2>; |3>$ càd les kets de la base

2)

	v_p de A	v_p B
$\|1>$	a	b
$\|2>$	a	-b
$\|3>$	0	-b

ni $\{A\}$ ni $\{B\}$ ne forment pas E.C.O.C. car la vp a est dégénérée de même la vp $-b$, alors que $\{A, B\}$ forme E.C.O.C.

3°) $(H) = E\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ qui se décompose en 2 matrices :
l'une d'ordre 1 donne la vp $\lambda_1 = E$
la seconde $(E-\lambda)(-E-\lambda) - 3E^2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2E;\ \lambda_3 = -2E$

Soit $|\varphi_1>$ $\vec{v_p}$ associé à λ_1 ; $|\varphi_2>$ à λ_2 et $|\varphi_3>$ à λ_3, on aura à un facteur de phase près :

$|\varphi_1> = |3>$; $|\varphi_2> = \frac{\sqrt{3}}{2}|1> + \frac{1}{2}|2>$; $|\varphi_3> = \frac{1}{2}|1> - \frac{\sqrt{3}}{2}|2>$

4°) on vérifie que $[A, H] = 0 \Rightarrow$ les $|\varphi_i>$ sont aussi $\vec{v_p}$ de A
et on aura :

	v_p de H	v_p de A
$\|\varphi_1>$	E	a
$\|\varphi_2>$	2E	a
$\|\varphi_3>$	-2E	0

⇒ $\{H\}$ forme à elle seule E.C.O.C.
$\{H, A\}$ " " " , car $[H, A]$ commute et à chaque couple de vp est associé 1 seul ket
$(E, a) \to |\varphi_1>$; $(2E, a) \to |\varphi_2>$ et $(-2E, 0) \to |\varphi_3>$.

IV/

$H|\varphi_n> = E_n|\varphi_n> \Rightarrow <\varphi_n|H = E_n<\varphi_n|$ car H est observable

1°) $<\varphi_n|[A,H]|\varphi_n> = <\varphi_n|AH|\varphi_n> - <\varphi_n|HA|\varphi_n>$.
$= E_n<\varphi_n|A|\varphi_n> - E_n<\varphi_n|A|\varphi_n> = 0$

2°) $H = \frac{P_x^2}{2m} + V(X)$

a)
- $[H, P_x] = [V(X), P_x] = [X, P_x]\frac{dV}{dX} = i\hbar\frac{dV}{dX}$
- $[H, X] = \left[\frac{P_x^2}{2m}, X\right] = \frac{1}{2m}[P_x, X]\,2P_x = -\frac{i\hbar}{m}P_x$.
- $[H, XP_x] = X[H, P_x] + [H, X]P_x = i\hbar X\frac{dV}{dX} - \frac{i\hbar}{m}P_x^2$

b) D'après 1°) $A = X \Rightarrow <\varphi_n|[X,H]|\varphi_n> = 0 \Rightarrow \frac{i\hbar}{m}<\varphi_n|P_x|\varphi_n> = 0$

c) $A = XP_x \Rightarrow <\varphi_n|X\frac{dV}{dX}|\varphi_n> = <\varphi_n|\frac{P_x^2}{m}|\varphi_n> = 2<\varphi_n|\frac{P_x^2}{2m}|\varphi_n>$

d) $V(X) = V_0X^k \to XV(X) = kV(X) \Rightarrow <T> = \frac{k}{2}<\varphi_n|V(X)|\varphi_n> = \frac{k}{2}<V(X)>$

pour $k = 2 \Rightarrow <T> = <V(X)>$.

KADDOURI

(7pts)

Exercice 3 $\vec{\mathcal{E}} // Oz$ et $H = \frac{P^2}{2m} - q\mathcal{E}Z$ avec $P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$

1) $[P_\mu, H] = -q\mathcal{E}[P_\mu, Z]$ car $[P_\mu, P^2] = 0$ avec $\mu = x, y, z$.

Sachant que $[P_\mu, Z] = -i\hbar \mathbb{1} \delta_{\mu z}$

$\Rightarrow [P_x, H] = 0$ (0,5) , $[P_y, H] = 0$ (0,5) et $[P_z, H] = i\hbar q \mathcal{E} \mathbb{1}$ (0,5)

2°) $H|\phi\rangle = E|\phi\rangle$ E est non dégénérée.

a) $[P_x, H] = 0 \Rightarrow P_x H = H P_x \Rightarrow P_x H|\phi\rangle = H P_x|\phi\rangle$ (0,5)

soit $H P_x|\phi\rangle = E P_x|\phi\rangle$ donc $P_x|\phi\rangle$ est aussi ket propre de H associé à E

or E est vp simple $\Rightarrow$ $P_x|\phi\rangle$ et $|\phi\rangle$ **sont Colinéaires** (0,5)

Soit : $P_x|\phi\rangle = \alpha|\phi\rangle$ (0,5) ; $|\phi\rangle$ est alors $\vec{vp}$ de P_x associé à la vp α.

Même raisonnement pour P_y puisqu'il commute avec H (0,5)

soit $P_y|\phi\rangle = \beta|\phi\rangle$ (0,5) ; $|\phi\rangle$ est alors $\vec{vp}$ de P_x associé à la vp β.

b) • $P_x|\phi\rangle = \alpha|\phi\rangle \Rightarrow \langle\vec{r}|P_x|\phi\rangle = \alpha\langle\vec{r}|\phi\rangle$

$\Rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\phi(\vec{r}) = \alpha\phi(\vec{r}) \Rightarrow \phi(\vec{r}) = f(y,z)\, e^{\frac{i}{\hbar}\alpha x}$ (0,5)

• $P_y|\phi\rangle = \beta|\phi\rangle \Rightarrow \langle\vec{r}|P_y|\phi\rangle = \beta\langle\vec{r}|\phi\rangle$

$\Rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\phi(\vec{r}) = \beta\phi(\vec{r}) \Rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dy}f(y,z) = \beta f(y,z)$

$\Rightarrow f(y,z) = \varphi(z)\, e^{\frac{i}{\hbar}\beta y}$ (0,5)

Soit $\phi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\phi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\alpha x}\, e^{\frac{i}{\hbar}\beta y}\, \varphi(z)$ (0,5)

6/6

c) $H|\phi\rangle = E|\phi\rangle \Rightarrow \langle\vec{r}|H|\phi\rangle = E\langle\vec{r}|\phi\rangle$

$\Rightarrow \frac{1}{2m}\langle\vec{r}|P_x^2+P_y^2+P_z^2|\phi\rangle - q\mathcal{E}\langle\vec{r}|Z|\phi\rangle = E\,\phi(\vec{r})$ (0,5)

$\Rightarrow \frac{1}{2m}\langle\vec{r}|P_x^2+P_y^2|\phi\rangle + \frac{1}{2m}\langle\vec{r}|P_z^2|\phi\rangle - q\mathcal{E}z\,\phi(\vec{r}) = E\,\phi(\vec{r})$

Sachant que $P_x|\phi\rangle = \alpha|\phi\rangle \Rightarrow P_x^2|\phi\rangle = \alpha^2|\phi\rangle \Rightarrow \langle\vec{r}|P_x^2|\phi\rangle = \alpha^2\phi(\vec{r})$

et que $\langle\vec{r}|P_z|\phi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}\phi(\vec{r}) \Rightarrow \langle\vec{r}|P_z^2|\phi\rangle = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(\vec{r})$ (0,5)

$\Rightarrow \frac{1}{2m}(\alpha^2+\beta^2)\phi(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(\vec{r}) - q\mathcal{E}z\,\phi(\vec{r}) = E\,\phi(\vec{r})$

$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(\vec{r}) - q\mathcal{E}z\,\phi(\vec{r}) = \left(E - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2m}\right)\phi(\vec{r})$

En divisant par $e^{\frac{i}{\hbar}\alpha x}\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\beta y}\cdot\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)$, on aura : (0,5)

$$\frac{d^2}{dz^2}\varphi(z) + \frac{2mq\mathcal{E}}{\hbar^2}z\,\varphi(z) = -\frac{1}{\hbar^2}\left[2mE - (\alpha^2+\beta^2)\right]\varphi(z)$$

En posant : $k = \frac{2mq\mathcal{E}}{\hbar^2}$ et $\lambda^2 = 2mE - \alpha^2 - \beta^2$, on obtient :

$$\frac{d^2}{dz^2}\varphi(z) + kz\,\varphi(z) = -\frac{\lambda^2}{\hbar^2}\varphi(z)$$